Анализ на задача 5 (Въпроси), 2010 – 2011 г.

Николай Неделчев

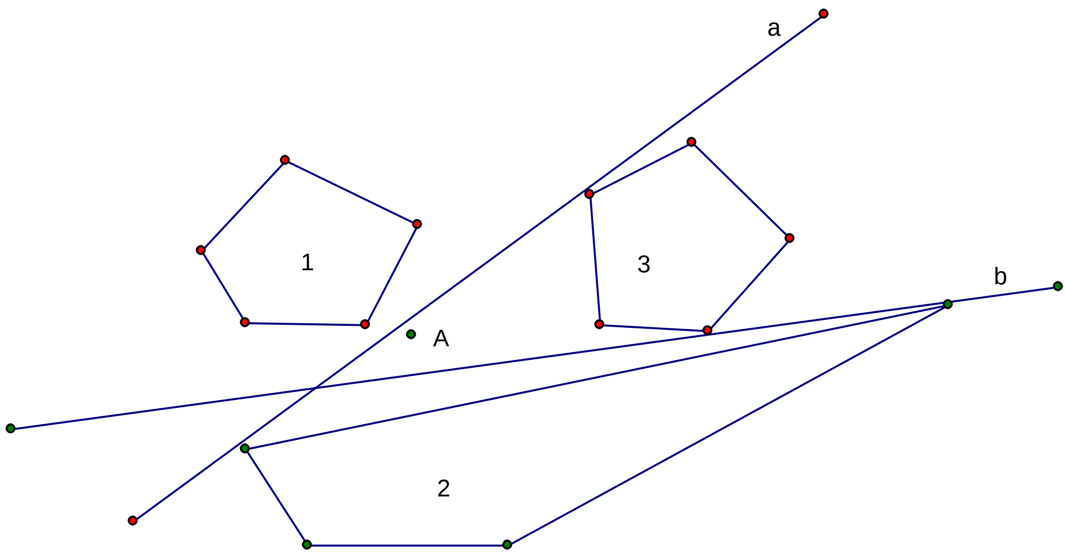
От условието на задачата се вижда лесно (няма да доказвам това твърдение), че зоните, които се образуват от пресичането на прави линии, са изпъкнали многоъгълници.

Аз избрах подход без първоначални питания за избрани от мен координати. От това следва, че за първите зададени ни въпроси нямаме друга печеливша стратегия, освен да налучкваме и да запазваме верните резултати. От всички точки в дадена зона можем да построим по един изпъкнал многоъгълник, такъв, че да съдържа в себе си всички до сега отворени точки от дадената зона. Алгоритми за това може да се намерят в http://en.wikipedia.org/wiki/Convex_hull_algorithms. Аз избрах „Сканиране на Греам", поради две причини – първо лесна имплементация и линейна сложност след сортиращия алгоритъм т.е. $O(n \log n)$ и второ тъй като ние не се нуждаем от вътрешните точки в дадена зона, а само от най-външните и смело можем да ги премахнем, то в нашия случай няма нужда да от по-сложен „output-sensitive" алгоритъм. Тъй като зоните не се препокриват, е сигурно, че ако нова точка се намира вътре в някой от вече построените многоъгълници, то тя е от същата зона и ние можем да отговорим веднага на въпроса, без дори да запазваме тази точка някъде за по-нататъшни анализи.

Ако точката, която ни питат е извън границите на всички до сега построени многоъгълници, най-верният подход е да изберем най-близкия построен многоъгълник. И да познаем и да не познаем, вярната зона която ни върне системата, ще трябва да се разшири с новата точка, т.е. да се построй нов изпъкнал многоъгълник за съответната зона с вече добавената нова точка.

В някои от случаите обаче, можем лесно да видим, че най-близкия многоъгълник, не е възможен отговор:

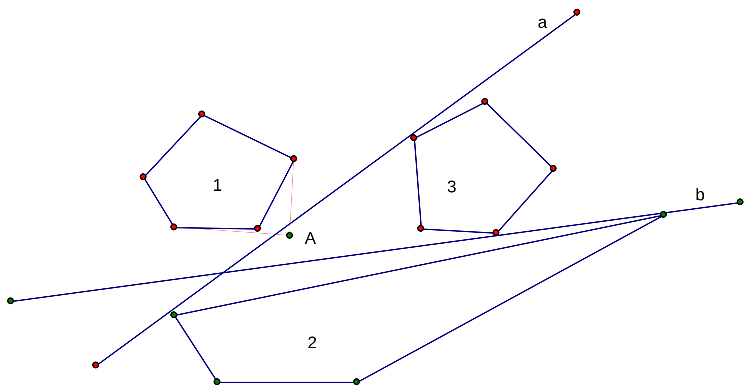
Пример:



На предложеният пример, имаме три частично открити зони и трябва да решим коя да изберем за точка A.

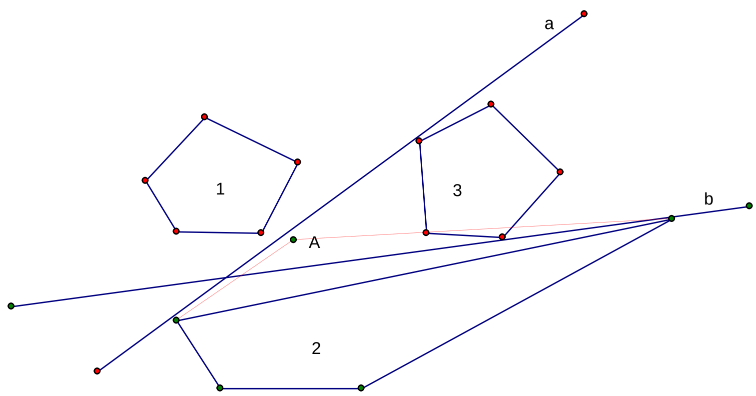
Ясно е, че зоната в която се намира точка A, ще трябва да се разшири. Нека да разгледаме и трите варианта на разширяване:

- Избираме зона 1.



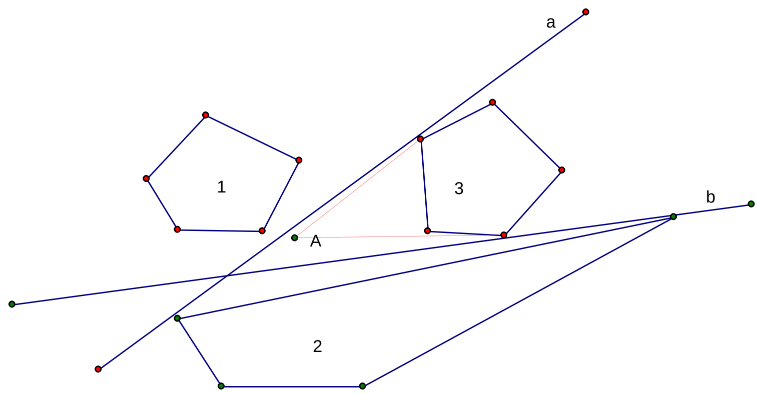
Видно е, че няма как да построим права a, която да отдели многоъгълници 1 и 3.

- Избираме зона 2.



Новият многоъгълник 2, пресича многоъгълник 3 и няма как да се построи права b, която да отдели многоъгълници 2 и 1.

- Избираме зона 3.



-

Този избор би могъл да бъде верен

От дадeният пример се вижда, как първото възможно предположение се оказа най-отдалечената зона.

Следват два логични въпроса, които трябва да си зададем преди да направим избора си:

1. Съществуват ли прави, които разделят новите зони (тези които биха се получили след нашия избор, ако той е верен) една от друга ?
2. Презастъпват ли се някои от зоните ?

Лесно се вижда, че вторият въпрос е излишен, ако отговорим на първия.

Истинското решение би било твърде бавно за даденото времево ограничение, понеже трябва да се провери дали е възможно да се отдели всеки многоъгълник от всички други с валидни прави, непресичащи която и да било зона. Това решение има квадратична сложност и е неприложимо в нашия случай. Аз избрах компромисен вариант, проверявайки само многоъгълника, чиято зона проверявам.

За решаването на този проблем, използвах системи линейни неравенства. За да се докаже, че е възможно да се отделят два многоъгълника с права е достатъчно да се състави подходящата система линейни неравенства и да се донаже, че тя има решение.

Алгоритъм:

Ако искаме да проверим дали има права y = ax+b, която отделя многоъгълник 1 от многоъгълник 2 :

Съставяме две системи линейни неравенства:

1. У-координатите на всички точки от многоъгълник 1 да са по-големи от съответните У-координати на правата, т.е. ако точките на многоъгълник 1 имат координати :
   (x11, y11), (x12, y12), (x13, y13), ...,(x1n, y1n), то :
   y11 > ax11 + b
   y12 > ax12 + b
   y13 > ax13 + b
   …..
   y1n > ax1n + b
   У-координатите на всички точки от многоъгълник 2 да са по-малки от съответните У-координати на правата, т.е. допълваме горната система със следните неравенства :
   y21 < ax21 + b
   y22 < ax22 + b
   y23 < ax23 + b
   …..
   y2m < ax2m + b

   До тук имаме система линийни неравенства, която отделя двата многоъгълника, така, че многоъгълник 1 е от горната страна на правата, а многоъгълник 2 е от долната. Сега просто трябва да продължим да допълваме системата, така че да сме сигурни, че нашата права y = ax+b, няма да пресича нито един многоъгълник. За тази цел аз избрах рекурсивен подход:

ПОДСИГУРИ МНОГОЪГЪЛНИК (многоъгълник М, система С)

Допълни системата С, с всички точки от многоъгълник М, така че те да са от горната страна на правата y = ax+b.

При успех

ПОДСИГУРИ МНОГОЪГЪЛНИК(следващ неподсигурен М, новополучената С)

При успех, върни успех.

Допълни първоначалната система С, с всички точки от многоъгълника М, така че те да са от долната страна на правата y = ax+b.

При успех

ПОДСИГУРИ МНОГОЪГЪЛНИК(следващ неподсигурен М, новополучената С)

При успех, върни успех.

Върни неуспех.

Ако подсигуряването на някой от многоъгълниците завърши с неуспех, трябва да пробваме съставянето на друга първоначална система линейни неравенства, в която многоъгълници 1. и 2. са съответно от долната и горната страна на правата y = ax+b.:

2.

y11 < ax11 + b
y12 < ax12 + b
y13 < ax13 + b
…..
y1n < ax1n + b
y21 > ax21 + b
y22 > ax22 + b
y23 > ax23 + b
…..
y2m > ax2m + b

Следват същите стъпки от първата система.

Вече можем да дефинираме крайния алгоритъм за избор на зона:

Ако дадена точка е вътре в някой от построените многоъгълници, избираме него, иначе избираме най-близкия ВЪЗМОЖЕН многоъгълник.